

ACT204 – RETRAITE

FICHE D'EXERCICES

1. REGIME PAR REPARTITION EN POINTS

Soit un régime par répartition libellé en points avec les notations suivantes :

- $A(x)$ le nombre d'actifs cotisants d'âge x et $R(x)$ le nombre de retraités d'âge x ;
- $Pt(x)$ le nombre de points en stock de l'individu d'âge x ;
- VA_t et VE_t respectivement les valeurs d'acquisition et d'exercice du point de retraite pour l'année t ;
- la valeur d'acquisition du point est toujours 10 fois supérieure à celle de service ;
- i le taux d'actualisation retenu ;
- la table de mortalité utilisée est la TGH 05.

Le régime est construit de telle façon que chaque individu acquiert un nombre de points identique pour chaque année cotisée, soit α ce nombre de points. Par ailleurs, chaque individu entre dans le régime à 25 ans, les retraités actuels ont tous liquidés leurs droits à 65 ans, âge prévu par le régime. Les actifs ont tous moins de 65 ans.

- a. Ecrire l'engagement assurantiel actuel du régime.

$$Eng_t = Eng_t(\text{retraités}) + Eng_t(\text{actifs}_{\text{stock}})$$

$$Eng_t = \left(VE_t \sum_{x=0}^{\infty} R(x) Pt(x) a_x \right) + \left(VE_t \sum_{x=0}^{64} A(x) Pt(x) \frac{l_{65}}{l_x} \frac{1}{(1+i)^{65-x}} a_{65} \right)$$

$$Eng_t = \left(VE_t 40\alpha \sum_{x=65}^{\infty} R(x) a_x \right) + \left(VE_t \alpha \sum_{x=25}^{64} A(x) \frac{l_{65}}{l_x} \frac{(x-25)}{(1+i)^{65-x}} a_{65} \right)$$

- b. Ecrire l'engagement de cotisation future des actifs ainsi que les engagements de retraite représentatifs.

$$Eng_t(\text{cotisations}) = \alpha VA_t \sum_{x=25}^{64} A(x) \sum_{k=x}^{64} \frac{l_k}{l_x} \frac{1}{(1+i)^{k-x}}$$

$$Eng_t(\text{actifs}_{\text{futur}}) = \alpha VE_t \sum_{x=25}^{64} A(x) \sum_{k=x}^{64} \frac{l_k}{l_x} \frac{1}{(1+i)^{k-x}} \times \frac{l_{65}}{l_k} \frac{1}{(1+i)^{65-k}} a_{65}$$

$$Eng_t(\text{actifs}_{\text{futur}}) = \alpha VE_t \sum_{x=25}^{64} A(x) \sum_{k=x}^{64} \frac{l_{65}}{l_x} \frac{1}{(1+i)^{65-x}} a_{65}$$

$$= \alpha VE_t \sum_{x=25}^{64} A(x) \frac{l_{65}}{l_x} \frac{65-x}{(1+i)^{65-x}} a_{65}$$

- c. Ecrire le taux couverture (groupe fermé) du régime et réaliser l'application numérique avec les éléments suivants :
- Les actifs ont tous 45 ans ;
 - Les retraités ont tous 70 ans ;
 - Il y a 2 fois plus d'actifs que de retraités ;
 - Les réserves sont de $\alpha \times VA \times A \times 20$.

$$TxCouverture_t = \frac{W_t + Eng_t(\text{cotisations})}{Eng_t(\text{actifs}_{\text{stock}}) + Eng_t(\text{actifs}_{\text{futur}}) + Eng_t(\text{retraités})}$$

$$TxCouverture_t = \frac{\alpha VA A \left(20 + \sum_{k=45}^{64} \frac{l_k}{l_{45}} \frac{1}{(1+i)^{k-45}} \right)}{\alpha VE A 20 \left(a_{70} + \frac{l_{65}}{l_{45}} \frac{2}{(1+i)^{20}} a_{65} \right)}$$

$$TxCouverture_t = 10 \frac{(20 + 16,50)}{20 (15,66 + 2 * 13,32)} = 43,14\%$$

- d. Quelle remarque peut-on faire sur le rendement du régime ? Quelle caractéristique devrait avoir la population active pour que ce rendement soit acceptable à un instant donné ?

Le rendement du régime est favorable aux assurés : 10%. En effet, la population active a en moyenne 45 ans (question c), pour cette population le taux de rendement actuariel est de $\frac{1}{20|a_{45}}$ soit $\frac{1}{13,32} = 7,51\%$.

Néanmoins, le taux de rendement actuariel est un indicateur imparfait puisqu'il est technique et ne prend pas en compte la situation financière du régime. Le taux de rendement de Wetzel permettrait utilement de compléter l'analyse.

- e. Déterminer le taux de rendement d'équilibre en utilisant l'équation de Wetzel.

$$TxWetzel = \frac{i * \frac{W_t}{VA} + \text{Points acquis dans l'année}}{\text{Droits de l'année en points} + i * (\text{Eng}_t \text{ en points})}$$

$$TxWetzel = \frac{i * \alpha * A * 20 + A * \alpha}{A * \alpha * {}_{20|}\ddot{a}_{45} + i * (40 * \alpha * R * a_{70} + \alpha * A * 20 * {}_{20|}\ddot{a}_{45})}$$

$$TxWetzel = \frac{(i * 20 + 1)}{{}_{20|}\ddot{a}_{45} + i * 20 * (a_{70} + {}_{20|}\ddot{a}_{45})} = \frac{1,4}{24,912} = 5,62\%$$

(nota : Le taux de rendement de Wetzel est logiquement inférieur au taux de rendement actuariel)

2. INTEGRATION DE REGIMES

Soit un régime similaire au régime précédent en termes de mécanismes. Une partie de la population du second régime va être intégrée au régime de l'exercice précédent, y compris leurs droits passés. Les caractéristiques de ce second régime sont les suivantes :

- La moyenne d'âge des actifs cotisants est de 25 ans ;
- Il n'y a pas encore de retraités ;
- Le nombre moyen de points en stock est de 2α avec une valeur de service 5 fois supérieure à celle du régime d'accueil ;
- Le régime est couvert à hauteur de 25 % ;
- Les conditions du transfert indiquent que les niveaux de rentes d'ores et déjà acquis sont maintenus au sein du régime d'accueil.

- a. En considérant que tous les actifs ont 25 ans, écrire l'engagement des droits transférés.

$$Eng_t(\text{actifs}_{2\text{stock}}) = PtMoyen(25) * A_2(25) * VE_{2t} * \frac{l_{65}}{l_{25}} * \frac{1}{(1+i)^{40}} * a_{65}$$

$$Eng_t(\text{actifs}_{2\text{stock}}) = 2 * \alpha * A_2(25) * 5 * VE_t * {}_{40|}\ddot{a}_{25}$$

- b. En considérant que la soulte payée par le régime transféré est à hauteur du taux de couverture des droits, que devient le taux de couverture du régime d'accueil (en groupe fermé) ? (application numérique : le nombre d'actif dans le régime transféré est 4 fois supérieur au régime d'accueil)

$$Eng_t(\text{cotisations2}) = \alpha * VA_t * A_2(25) * \sum_{x=25}^{64} \frac{l_x}{l_{25}} * \frac{1}{(1+i)^{x-25}}$$

$$Eng_t(\text{actifs2}_{\text{futur}}) = \alpha * VE_t * A_2(25) * \sum_{x=25}^{64} \frac{l_x}{l_{25}} * \frac{1}{(1+i)^{x-25}} * \frac{l_{65}}{l_x} * \frac{1}{(1+i)^{65-x}} * a_{65}$$

$$Eng_t(\text{actifs2}_{\text{futur}}) = \alpha * VE_t * A_2(25) * 40 * \ddot{a}_{40|25}$$

$TxCouverture_t$

$$\frac{\alpha * VA * A * \left(20 + \sum_{k=45}^{64} \frac{l_k}{l_{45}} \frac{1}{(1+i)^{k-45}} + 4 * \sum_{x=25}^{64} \frac{l_x}{l_{25}} * \frac{1}{(1+i)^{x-25}} + \ddot{a}_{40|25} \right)}{\alpha * VE * A * 20 * \left(a_{70} + \frac{l_{65}}{l_{45}} \frac{2}{(1+i)^{20}} a_{65} + 2 * \ddot{a}_{40|25} + 8 * \ddot{a}_{40|25} \right)}$$

$$TxCouverture_t = 10 \frac{(20 + 16,50 + 4 * 27,74 + 9,68)}{20 (15,66 + 2 * 13,32 + 10 * 9,68)} = 56,48\%$$

(nota : le taux de couverture groupe fermé s'améliore dans la mesure où la nouvelle population, jeune, va apporter des cotisations durables)

c. Que devient dans ce cadre le taux de rendement cible du régime ?

$TxWetzel$

$$\frac{i * \alpha * A * (20 + \ddot{a}_{40|25}) + 5 * A * \alpha}{A * \alpha * (\ddot{a}_{20|45} + 4 * \ddot{a}_{40|25}) + i * (40 * \alpha * R * a_{70} + \alpha * A * 20 * \ddot{a}_{20|45} + 40 * \alpha * A * \ddot{a}_{40|25})}$$

$$TxWetzel = \frac{i * (20 + \ddot{a}_{40|25}) + 5}{\ddot{a}_{20|45} + 4 * \ddot{a}_{40|25} + i * 20 * (a_{70} + \ddot{a}_{20|45} + 2 * \ddot{a}_{40|25})} = \frac{5,5936}{71,376} = 7,84\%$$

d. La soulte envisagée semble-t-elle satisfaisante au regard des impacts mesurés sur le régime par les indicateurs précédents.

L'apport de la nouvelle population dans le régime 1 améliore le taux de couverture groupe fermé, et améliore l'indicateur de Wetzel. Ainsi grâce à cette population, le régime se porte mieux et le taux de rendement cible est moins éloigné du taux de rendement réel, l'effort d'ajustement du régime sera alors moins grand. Dans ce sens, le régime 1 ne pouvait demander plus d'effort financier au régime 2 ; la soulte apparaît alors satisfaisante.

3. LES REGIMES L441

Dans le cadre d'un régime de retraite relevant du L441 du Code des Assurances, l'assureur fait le choix de ne pas modifier les prix d'acquisition des points pendant plusieurs années, de même pour l'ensemble des coefficients relatifs aux options de rente. L'âge de départ

prévu par le régime est 65 ans, on considère que la valeur de service vaut 1 € et n'est pas revalorisée, il représente une rente simple sans option et sans contre assurance. (Utiliser les tables de mortalité TGH 05 / TGF 05)

- a. Quelle est l'erreur commise sur le prix d'acquisition du point à 40 ans et à 60 ans lors de la 5^{ème} année.

A l'origine, le prix d'acquisition d'un point de retraite à 40 ans est de 12,30 ; à 60 ans le prix est de 17,13. Au terme de cinq années, les tarifs techniques seraient respectivement de 12,57 et 17,52 ; soit des sous-tarifations de 2,15 % et 2,23 %.

- b. Ecrire les coefficients de transformation de la rente en prenant en compte la réversion, puis un autre coefficient pour un départ après 65 ans. Le coefficient avec réversion prévu par l'assureur ne dépend que du taux de réversion et de l'écart d'âge entre les deux têtes.

$$\text{CoefReversion}(TxRev, \alpha) = \frac{a_{65}}{a_{65} + TxRev \times (a_{65+\alpha} - a_{65,65+\alpha})}$$

$$\text{CoefProrogation}(x > 65) = \frac{a_{65}}{a_x}$$

Attention, en toute logique il faut être vigilant à la génération prise en compte dans les calculs. Cet élément n'est pas pris en compte ici.

- c. Ecrire le coefficient prenant en compte ces deux options à la fois. Application numérique : quelle est l'erreur entre ce coefficient et la multiplication des deux coefficients précédents pour un homme qui liquide ses droits à 70 ans avec 60 % de réversion sur son conjoint de 2 années plus jeune ?

Le coefficient général s'écrirait :

$$\text{Coef}(TxRev, \alpha, x) = \frac{a_{65}}{a_x + TxRev \times (a_{x+\alpha} - a_{x,x+\alpha})}$$

Les applications numériques donnent :

$$\text{CoefReversion}(60\%, -2) = 0,8612$$

$$\text{CoefProrogation}(70) = 1,2005$$

$$\text{Coef}(60\%, -2, 70) = 1,0011$$

On lui applique alors un coefficient de 1,0339 au lieu de 1,0011 ; soit une erreur qui vient majorer la pension de l'assuré à hauteur de 3,28 %.

- d. Le taux de couverture comptable du régime est de 105 % au terme de 4 années. La PMT vaut 10 000, il y a absence de plus ou moins-values latentes et il n'y a pas encore de prestations. Au cours de la 5^{ème} année, 500 points sont achetés par des

salariés de 40 ans et 1 000 points par des salariés de 60 ans. Quel est l'impact comptable de ces événements ?

La PTS vaut donc 105 % de 10 000 soit 10 500. Il faut ajouter les cotisations soit 500 points à 12,30 et 1 000 à 17,13 (les prix ne bougent pas). La PTS passe à 33 780. Côté provision il faut ajouter 500 points à 12,57 et 1 000 à 17,52 ; la PMT passe à 33 805. Le taux de couverture de la seule PTS passe à 99,93 % et il y a donc une constitution de PTSC de 25 €.

- e. Au cours de la 5^{ème} année, des salariés hommes de 70 ans possédant au total 1 000 points demandent à liquider leurs droits avec l'option de réversion à 60 % sur un conjoint plus jeune de 2 années. Quel est l'impact technique à la date de liquidation ? Quel aurait été l'impact d'un calcul correct à l'origine du coefficient de liquidation combinant les options ?

Nous sommes en année N+5 et les coefficients de conversion n'ont pas évolués. Les 1 000 points liquidés sont ajustés par le coefficient 1,0339 provisionné avec la valeur unitaire de 19,20 ; soit une provision de 19 850.

*Il faut également déterminer la PMT avant liquidation qui vaut $1\,000 * 1,2005 * 16,08$ soit 19 304.*

Dans une situation où il y a déjà une PTSC, celle-ci est augmentée de 546.

Avec un coefficient « bien calculé » il vient une PMT liquidée de 19 220, ce qui conduit à ne pas alourdir la PTSC, voire de la reprendre au regard du point d (reprise maximale de 84). Il n'y a malgré tout pas égalité entre la PM liquidée et la PM provisionnée dans la mesure où le coefficient, bien que correctement calculé, n'est pas calculé à la bonne date.

4. REGIME DE TYPE 83 EN CAPITALISATION

Dans le cadre d'un régime de retraite d'entreprise de type article 83, les liquidations en rente sont réalisées avec les tables TH00-02 et TF00-02 (qui servent aussi à provisionner) et le taux d'actualisation de 2 %. Au cours de l'exercice N les événements sont les suivants :

- Au 1^{er} janvier, il y a déjà les retraités suivants :

Retraités au 1er janvier N		
Retraité	Age	Pension annuelle
Alphonse	65	4 000
Bernard	65	6 000
Claude	70	5 000
David	80	5 000

- Au 1^{er} janvier, un salarié de 65 ans liquide ses droits et possède un capital constitutif de 30 700 € ;
 - Le taux de rendement financier net de l'assureur est de 5 % ;
 - La dotation à la provision pour participation aux bénéfiques est de 90 % des résultats ;
 - Il n'y a pas de chargements sur rentes, les frais de gestions des rentes sont de 1 % des arrérages ;
 - Par convention, les intérêts techniques et les produits financiers seront calculés selon la même méthode et sur la base de la demi somme des montants placés sur les marchés entre l'ouverture et la clôture.
- a. Compléter le compte technique et financier du fonds des rentiers au 31/12 sachant que tous les assurés sont encore en vie.

Débit		Crédit	
Arrérages payés en N	22 000	CC des rentes liquidées en N	30 700
PM au 31/12	286 950	PM au 01/01	275 750
Frais de service de rentes	220	Intérêts techniques	5 934
		Prélèvement sur la PPB	0
Solde technique créditeur	3 214	Solde technique débiteur	0
Total technique	312 384	Total technique	312 384
Intérêts techniques	5 934	Produits financiers	14 835
Solde financier créditeur	8 901	Solde financier débiteur	0
Total financier	14 835	Total financier	14 835
Solde technique débiteur	0	Solde technique créditeur	3 214
Solde financier débiteur	0	Solde financier créditeur	8 901
Solde créditeur	12 115	Solde débiteur	0
Dotation PPB	10 904		
Résultat	327 219	Résultat	327 219

- b. L'assureur décide de revaloriser les droits au 31 décembre N+1 de 2 %, comment faire ?

Il faut augmenter les PM de 2 %, soit 5 739 € ! Il faut puiser dans la PPB si elle existe.

- c. David décède le 30 décembre de l'exercice (la pension lui a été versée). La PPB est nulle à l'origine, combien vaut la PPB après une revalorisation des rentes de 3 % ?

Débit		Crédit	
Arrérages payés en N	22 000	CC des rentes liquidées en N	30 700
PM au 31/12	248 550	PM au 01/01	275 750
Frais de service de rentes	220	Intérêts techniques	5 550
		Prélèvement sur la PPB	0
Solde technique créditeur	41 230	Solde technique débiteur	0
Total technique	312 000	Total technique	312 000
Intérêts techniques	5 550	Produits financiers	13 875
Solde financier créditeur	8 325	Solde financier débiteur	0
Total financier	13 875	Total financier	13 875
Solde technique débiteur	0	Solde technique créditeur	41 230
Solde financier débiteur	0	Solde financier créditeur	8 325
Solde créditeur	49 555	Solde débiteur	0
Dotations PPB	44 600		
Résultat	325 875	Résultat	325 875

Une revalorisation des rentes de 3% engendre une reprise sur la PPB au 1^{er} janvier N+1 de 7 457 €. La PPB après cette revalo est alors de $44\,600 - 7\,457 = 37\,143$.

ANNEXE

- a_x différés à 65 ans (immédiat quant $x > 65$), sans option, avec la TGH 05 à 2 %

Age	Année de calcul					
	2023	2024	2025	2026	2027	2028
25	9,68	9,72	9,76	9,79	9,83	9,86
30	10,49	10,54	10,58	10,62	10,66	10,70
35	11,37	11,41	11,46	11,51	11,55	11,60
40	12,30	12,36	12,41	12,46	12,52	12,57
45	13,32	13,38	13,44	13,50	13,56	13,62
55	15,68	15,75	15,83	15,90	15,98	16,05
60	17,13	17,21	17,29	17,37	17,45	17,52
65	18,80	18,89	18,97	19,06	19,14	19,22
70	15,66	15,74	15,83	15,91	16,00	16,08
75	12,52	12,60	12,68	12,76	12,84	12,93
80	9,40	9,47	9,54	9,61	9,69	9,76

- a_x différés à 65 ans (immédiat quant $x > 65$), avec réversion à 60 % sur une personne plus jeune de deux années, avec les TGH 05 / TGF 05 à 2 %

Age	Année de calcul					
	2023	2024	2025	2026	2027	2028
25	11,04	11,07	11,10	11,13	11,16	11,19
30	12,02	12,05	12,09	12,12	12,16	12,19
35	13,07	13,12	13,16	13,20	13,24	13,28
40	14,22	14,26	14,31	14,36	14,40	14,45
45	15,46	15,51	15,56	15,61	15,67	15,72
55	18,30	18,37	18,43	18,50	18,56	18,63
60	19,97	20,04	20,11	20,18	20,26	20,33
65	21,83	21,91	21,99	22,07	22,15	22,23
70	18,78	18,87	18,95	19,03	19,11	19,20
75	15,60	15,68	15,76	15,85	15,93	16,01
80	12,31	12,39	12,47	12,55	12,63	12,71

- Probabilités de survie à 65 ans avec la TGH 05

Age	Année de calcul					
	2023	2024	2025	2026	2027	2028
25	0,9752	0,9758	0,9763	0,9769	0,9774	0,9779
30	0,9734	0,9740	0,9746	0,9751	0,9757	0,9762
35	0,9715	0,9721	0,9727	0,9734	0,9740	0,9745
40	0,9698	0,9705	0,9711	0,9718	0,9724	0,9730
45	0,9689	0,9696	0,9703	0,9709	0,9716	0,9722
55	0,9735	0,9741	0,9747	0,9752	0,9758	0,9763
60	0,9837	0,9840	0,9844	0,9847	0,9851	0,9854

- a_x immédiat sans option, avec la TH 00-02 (en cas de vie) à 2 %

Age	a_x
64	16,83
65	15,35
66	14,86
67	14,36
68	13,86
69	13,36
70	12,87
71	12,38
72	11,89
73	11,40
74	10,92
75	9,97
76	9,50
77	9,04
78	8,58
79	8,13
80	7,68
81	7,25
82	6,81
83	6,39

- Divers, avec la TGH 05 :

$$\left(\frac{1}{1 + 2\%}\right)^{20} = 0,6730$$

$$\sum_{x=45}^{64} \frac{l_x}{l_{45}} \frac{1}{(1 + 2\%)^{x-45}} = 16,50$$

$$\sum_{x=25}^{64} \frac{l_x}{l_{25}} \frac{1}{(1 + 2\%)^{x-25}} = 27,74$$